Απειροστικός Λογισμός IV

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητής Γιαννούλης Ιωάννης

Ιούνιος 2015

1. [1] Δικαιολογείστε γιατί το κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα x

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \right\},$$

όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$, $x \in [0,1]$, είναι Jordan μετρήσιμο.

2. [1] Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $B_R \subset \mathbb{R}^3$ η μπάλα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$. Εκφράστε το ολοκλήρωμα της f πάνω από την μπάλα B_R με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων και δικαιολογήστε την μορφή της νέας ολοκληρωτέας συνάρτησης και του πεδίου ορισμού της.

3. [2] Υπολογίστε

   α) το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_B (x^2 + y^2 + z^2)\, d(x, y, z)$ για
   $$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ z \leqslant 0 \right\}.$$

   β) τον όγκο του
   $$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y^2 + z^2 \leqslant x^2 \right\}.$$

   γ) τον όγκο του τετραέδρου που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $z = 2 - 2x - y$.

4. [1] Δίνεται η καμπύλη $\overline{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{2} t^2, \frac{1}{3} t^3\right)$, $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 + 2x$. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $C = \overline{\gamma}\left(\left[0, \sqrt{3}\right]\right)$ καθώς και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\overline{\gamma}} f(x, y)\, ds$.

5. [1] Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\overline{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{f}(x,y) = (3x^2y, x^3)$.

   α) Εξετάστε αν το $\overline{f}$ είναι πεδίο κλίσεων και αν είναι, βρείτε μια αντιπαράγωγο (δυναμικό).

   β) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \overline{f}(x,y)\cdot d(x,y)$, όπου C είναι η καμπύλη που προκύπτει από την ένωση της (εικόνας της) $\overline{\gamma}(t) = (t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ και τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $(2\pi, 1)$, $(2\pi, 2)$, $(0,2)$, $(0,1)$ με αυτήν την σειρά.

6. [3] Δίνονται η επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^3$ και το διανυσματικό πεδίο $\overline{F}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 1,\ x^2+y^2+z^2 = 4\right\}, \qquad \overline{F}(x,y,z) = \left(x^2y,\ \tfrac{1}{2}z^2,\ yz\right).$$

   α) Υπολογίστε το εμβαδόν της S.

   β) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για τις S και $\overline{F}$.

   γ) Υπολογίστε με χρήση του θεωρήματος του Gauss το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial V} \overline{F}\cdot\overline{n}\, d\sigma$, όπου V είναι το χωρίο που περικλείεται από την S και το επίπεδο $z = 1$ και $\overline{n}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο ∂V.

7. [1] Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Λύσεις Θεμάτων

1. Από θεώρημα ισχύει ότι αν D είναι ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\phi_1, \phi_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\phi_1(\overline{x}) \leqslant \phi_2(\overline{x})$, $\overline{x} \in D$, τότε το σύνολο

$$B = \left\{ \left(\overline{x}, y\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \overline{x} \in D,\ \phi_1(\overline{x}) \leqslant y \leqslant \phi_2(\overline{x}) \right\},$$

είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Το διάστημα $[0,1]$ είναι ένα φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}$ με σύνορο $\partial\big([0,1]\big) = \{0,1\}$ μηδενικού περιεχομένου. Επομένως είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}$ και σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το σύνολο του $\mathbb{R}^2$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \right\}$$

όπου $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς -άρα και ολοκληρώσιμες- συναρτήσεις με $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$, $x \in [0,1]$, είναι Jordan μετρήσιμο. $\square$

2. Η μπάλα $B_R \subset \mathbb{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$, είναι το σύνολο

$$B_R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -R \leqslant x \leqslant R,\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2},\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Επομένως

$$\iiint\limits_{B_R} f(\overline{x})\, d(\overline{x}) = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

Θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητών

$$\overline{g} : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \overline{g}(A) = B_R \subset \mathbb{R}^3;$$

$$\overline{g}(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ \rho \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \rho \in [0,R]\ ,\ \vartheta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi]\,,$$

προκύπτουν

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{D}\, \overline{g}(\rho,\vartheta,\varphi)\right| &= \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin\vartheta \end{aligned}$$

και

$$\overline{g}^{-1}(B_R) = \left\{(\rho\cos\varphi\sin\vartheta, \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant \rho \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

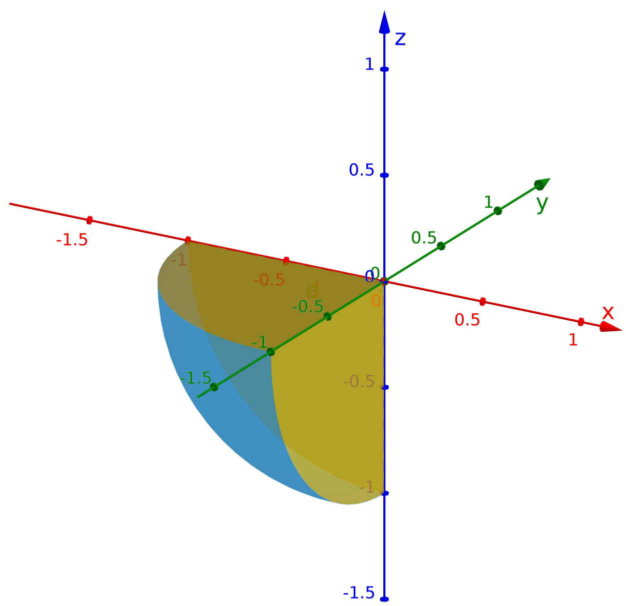
Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\rho,\vartheta,\varphi)\,|\rho^2\sin\vartheta|\,d\varphi\,d\vartheta\,d\rho\,. \qquad \square$$

3. α) Το σύνολο

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0\,,\ z \leqslant 0\right\}.$$

είναι το 1/8 της μοναδιαίας μπάλας στο οποίο όλες οι συντεταγμένες των σημείων του είναι μη-θετικές.



Θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητών (σφαιρικές συντεταγμένες) που χρησιμοποιήθηκαν και στο 2ο θέμα, προκύπτουν

$$\overline{g}^{-1}(B) = \left\{(\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \rho\cos\vartheta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\,,\ \tfrac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi\,,\ \pi \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

και

$$\iiint\limits_{B} (x^2+y^2+z^2)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{\overline{g}^{-1}(B)} \rho^2 \, |\rho^2 \sin\vartheta| \, d(\rho,\vartheta,\varphi)$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \rho^4 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^4 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\rho$$

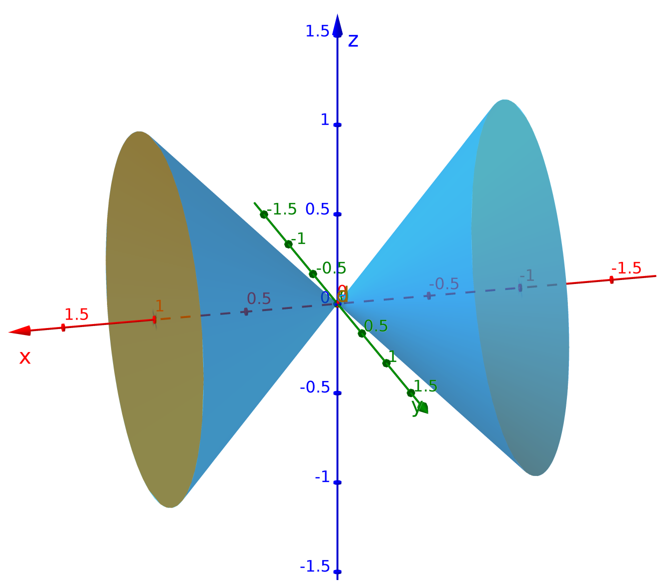
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^4 \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{10}. \qquad \square$$

β) Το σύνολο

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y^2+z^2 \leqslant x^2\right\}$$

είναι το στερεό που περικλείεται από το δίχωνο $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \pm\sqrt{y^2+z^2}\right\}$ με άξονα συμμετρίας τον x-άξονα και τους δίσκους $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -1,\ y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$ και $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1,\ y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$.



Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Ο όγκος του V ισούται με

$$V(V) = \iiint\limits_V d(x,y,z) = \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{x}\int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

Θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητών

$$\overline{g} : T \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \overline{g}(T) = V \subset \mathbb{R}^3\,;$$

$$\overline{g}(\vartheta,\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-1,1]\,,\ \rho \in [0,+\infty)\,,\ \varphi \in [0,2\pi]\,,$$

προκύπτουν

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{D}\,\overline{g}(\vartheta,\rho,\varphi)\right| &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\vartheta,\rho,\varphi)}\right| \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} \\ &= \rho \end{aligned}$$

και

$$\overline{g}^{-1}(V) = \left\{(\vartheta,\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant \vartheta \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \vartheta\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

Επομένως

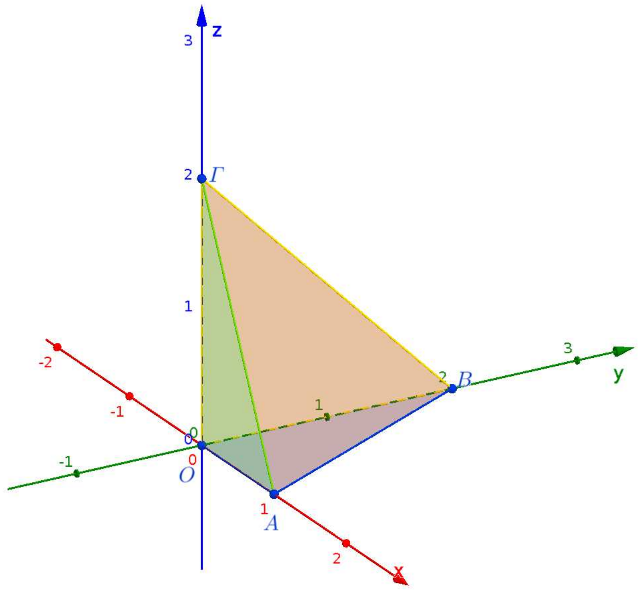
$$\begin{aligned} V(V) &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\vartheta}\int_{0}^{2\pi} |\rho|\,d\varphi\,d\rho\,d\vartheta \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\vartheta} 2\pi\rho\,d\rho\,d\vartheta \\ &= \int_{-1}^{1} \pi\,\vartheta^2\,d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

□

γ) Το στερεό τετράεδρο S με κορυφές την αρχή των αξόνων O και τα σημεία τομής του επιπέδου $2x + y + z = 2$ με τους ημιάξονες Ox, Oy, Oz, δηλαδή τα σημεία $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$ και $\Gamma\,(0,0,2)$, αντίστοιχα, είναι το σύνολο

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 2-2x\,,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-2x-y\right\}.$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com



Επομένως

$$\begin{aligned} V(S) &= \iiint\limits_{S} dS \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} 2-2x-y\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 2-4x+2x^2\, dx \\ &= \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

□

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

4. Το μήκος της καμπύλης $C = \overline{\gamma}\big([0,\sqrt{3}\,]\big)$, όπου $\overline{\gamma}(t) = \big(\frac{1}{2}\,t^2,\ \frac{1}{3}\,t^3\big)$, $t \in \big[0,\sqrt{3}\,\big]$, ισούται με

$$
\begin{aligned}
L(C) &= \int_0^{\sqrt{3}} \|\overline{\gamma}'(t)\|\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2+t^4}\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}\,dt \\
&\overset{\substack{u=1+t^2\\ \frac{1}{2}du=dt}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{7}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
\oint_C 1+2x\,ds &= \int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2)\,\sqrt{t^2+t^4}\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} t\,(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt \\
&\overset{\substack{u=1+t^2\\ \frac{1}{2}du=dt}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_1^4 u^{\frac{3}{2}}\,du \\
&= \frac{31}{5}\,.
\end{aligned}
$$

□

5. $\overline{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{f}(x,y) = (3x^2y, x^3)$.

α) Ο Ιακωβιανός πίνακας του διανυσματικού πεδίου $\overline{f}$ είναι ο $\mathbf{D}\,\overline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$. Επειδή είναι συμμετρικός πίνακας και το $\mathbb{R}^2$ είναι αστερόμορφο, έπεται ότι το $\overline{f}$ είναι πεδίο κλίσεων. Επομένως υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$
\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \overline{f}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y)\Big) = \big(3x^2y,\ x^3\big)\,.
$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Προκύπτουν

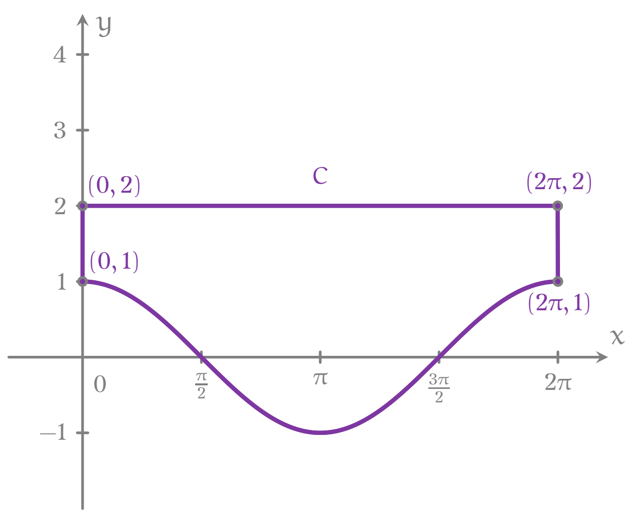
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = 3x^2y \quad &\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int 3x^2y\,dx \\
&\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = x^3y + g(y) \quad (1) \\
\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^3y + g(y)\big) \quad &\Rightarrow \quad x^3 = x^3 + \frac{d}{dy}\,g(y) \\
&\Rightarrow \quad g(y) = c\,,
\end{aligned}$$

όπου c μια σταθερά. Από την (1) προκύπτει ότι η

$$\varphi(x,y) = x^3y\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

είναι μια αντιπαράγωγος του $\overline{f}$, αφού ισχύει $\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \overline{f}(x,y)$. □

β) Επειδή η καμπύλη που προκύπτει από την ένωση της (εικόνας της) $\overline{\gamma}(t) = (t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ και τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $(2\pi, 1)$, $(2\pi, 2)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$ - με αυτήν την σειρά- είναι κλειστή



και το $\overline{f}$ είναι πεδίο κλίσεων, έπεται ότι $\oint_C \overline{f}(x,y)\cdot d(x,y) = 0$. □

6. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 1,\ x^2+y^2+z^2 = 4\}$, $\quad \overline{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\quad \overline{F}(x,y,z) = \left(x^2y,\ \frac{1}{2}z^2,\ yz\right)$.

α) Μια παραμετροποίηση της S σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι :

$$\overline{R} : T = \left[0, \tfrac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \overline{R}(T) = S \subset \mathbb{R}^3$$

$$\overline{R}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 2\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ 2\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ 2\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

στοιχειοθεσία LaTeX

Το κάθετο διάνυσμα στην S είναι το

$$\begin{aligned}
\overline{N}(\vartheta,\varphi) &= \frac{\partial\overline{R}}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi)\times\frac{\partial\overline{R}}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi) \\
&= \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 2\cos\vartheta\,\cos\varphi & 2\cos\vartheta\,\sin\varphi & -2\sin\vartheta \\ -2\sin\vartheta\,\sin\varphi & 2\sin\vartheta\,\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4\sin^2\vartheta\,\cos\varphi\,\overline{e}_1 + 4\sin^2\vartheta\,\sin\varphi\,\overline{e}_2 + 4\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\overline{e}_3 \\
&= \left(4\sin^2\vartheta\,\cos\varphi\,,\,4\sin^2\vartheta\,\sin\varphi\,,\,4\sin\vartheta\,\cos\vartheta\right)
\end{aligned}$$

με μέτρο $\left\|\overline{N}(\vartheta,\varphi)\right\| = 4\sin\vartheta\,,\quad \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. Επομένως το εμβαδόν της S ισούται με

$$\begin{aligned}
\oiint\limits_{S} dS &= \oiint\limits_{[0,\frac{\pi}{3}]\times[0,2\pi]} \left\|\overline{N}(\vartheta,\varphi)\right\| d(\vartheta,\varphi) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi} 4\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta \\
&= 4\pi\,.
\end{aligned}$$

□

β) Η παραμετρική επιφάνεια $\overline{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και έχει θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂S την περιφέρεια

$$\begin{aligned}
\partial S &= \left\{\left(2\sin\tfrac{\pi}{3}\,\cos\varphi\,,2\sin\tfrac{\pi}{3}\,\sin\varphi\,,2\cos\tfrac{\pi}{3}\right)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\} \\
&= \left\{\left(\sqrt{3}\,\cos\varphi,\sqrt{3}\,\sin\varphi,1\right)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\},
\end{aligned}$$

ενώ το διανυσματικό πεδίο $\overline{F}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμο. Επομένως πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Stokes και πρέπει να ισχύει

$$\oiint\limits_{S} (\nabla\times\overline{F}\,)\cdot d\overline{R} = \oint\limits_{\partial S} \overline{F}\cdot d\overline{r}\,,$$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\oiint\limits_{S} (\nabla \times \overline{F}) \cdot d\overline{R} = \oiint\limits_{S} (0,0,-x^2) \cdot d\overline{R} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} (0,0,-2\sin^2\vartheta\, \cos^2\varphi) \cdot \\
&\qquad \big(4\sin^2\vartheta\, \cos\varphi\,,\, 4\sin^2\vartheta\, \sin\varphi\,,\, 4\sin\vartheta\, \cos\vartheta\big)\, d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} -16\cos^2\varphi\, \sin^3\vartheta\, \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -16\pi\, \sin^3\vartheta\, \cos\vartheta\, d\vartheta \\
&= -\frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial S} \overline{F} \cdot d\overline{r} &= \int_0^{2\pi} \overline{F}\big(\sqrt{3}\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi, 1\big) \cdot \big(-\sqrt{3}\sin\varphi, \sqrt{3}\cos\varphi, 0\big)\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -9\cos^2\varphi\, \sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\, d\varphi \\
&= -\frac{9}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi)\, d\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \\
&= -\frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

γ) Το στερεό V που περικλείεται από την επιφάνεια S και το επίπεδο $z=1$ είναι το σύνολο

$$\begin{aligned}
V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\,,\ z \geqslant 1\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; -2 \leqslant x \leqslant 2\,,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\,,\ 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Για το V και το διανυσματικό πεδίο $\overline{F}$ πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Gauss και, επομένως, ισχύει

$$\iiint\limits_{V} \nabla \cdot \overline{F}\, d\Sigma = \oiint\limits_{\partial V} \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\sigma\,,$$

όπου $\overline{n}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο ∂V. Επομένως το ζητούμενο επιφανειακό ολοκλήρωμα ισούται με

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

$$J = \iiint\limits_V \nabla \cdot \overline{F}\, d\Sigma = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2xy + y\, dz\, dy\, dx\,.$$

Θεωρώντας την αλλαγή μεταβλητών (σφαιρικές συντεταγμένες) που εφαρμόστηκαν και στο 2ο θέμα, το J γίνεται

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2 \sin^2\vartheta\, \cos\varphi \sin\varphi + \rho \sin\vartheta\, \sin\varphi\right) |\rho^2 \sin\vartheta|\, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} 2\rho^4 \sin^3\vartheta\, \cos\varphi \sin\varphi + \rho^3 \sin^2\vartheta\, \sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 0\, d\vartheta\, d\rho \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

7. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| = \frac{\left|\cos(nx)\right|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, από το κριτήριο Weierstrass προκύπτει ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$, f είναι Riemann ολοκληρώσιμες και ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\, dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{n^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cancelto{0}{\cos\left(\frac{2k}{2}x\right)}}{(2k)^3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cancelto{(-1)^{k-1}}{\cos\left(\frac{2k-1}{2}x\right)}}{(2k-1)^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\,.
\end{aligned}$$

□

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

στοιχειοθεσία LaTeX